

BAB IV

PENUTUP

4.1. KESIMPULAN

Pendefinisian Fungsi Bervariasi Terbatas tak lepas dari keterkaitan interval dan partisi. Interval dapat dibentuk menjadi beberapa partisi dengan mengambil sebarang titik pada interval, dimana titik-titik yang diambil menjadi batas dari partisi pada interval.

Jika $[a, b]$ adalah suatu interval, maka dapat diambil titik-titik $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ dan dibentuk menjadi partisi pada $[a, b]$. Selanjutnya himpunan titik-titik $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ disebut sebagai partisi pada $[a, b]$, dan himpunan dari semua partisi pada $[a, b]$ disimbolkan dengan $\pi[a, b]$.

Suatu fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dikatakan **bervariasi terbatas (bounded variation)** pada $[a, b]$, jika terdapat konstanta $K > 0$ dengan sifat untuk setiap

partisi $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ pada $[a, b]$, berlaku $\sum_{i=1}^n |\Delta_i f| = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq K$.

Variasi fungsi f pada $[a, b]$ yang terkait dengan partisi $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ pada

$[a, b]$, ditulis $V_a^b(f, P)$, diberikan dengan $V_a^b(f, P) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$

Selanjutnya total variasi fungsi f pada $[a, b]$, dituliskan $T_a^b(f)$, didefinisikan

$$T_a^b(f) = \sup_{P \in \pi[a, b]} V_a^b(f, P).$$

Fungsi Bervariasi Terbatas memiliki beberapa sifat diantaranya adalah :

1. Diberikan fungsi $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Fungsi f bervariasi terbatas pada $[a,b]$ jika dan hanya jika $T_a^b(f) = \sup_{P \in \pi[a,b]} V_a^b(f, P) < \infty$.
2. $BV[a,b] = \{f \mid f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ fungsi bervariasi terbatas pada } [a,b]\}$ merupakan ruang linear atas \mathbb{R} .
3. Jika $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi monoton, maka fungsi f bervariasi terbatas.
4. Jika f monoton naik pada interval $[a,c]$ dan monoton turun pada interval $[c,b]$, maka fungsi f bervariasi terbatas pada selang $[a,b]$.
5. Jika f fungsi monoton bagian demi bagian pada selang $[a,b]$, maka fungsi f bervariasi terbatas pada $[a,b]$.
6. Fungsi $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ bervariasi terbatas pada $[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $c \in [a,b]$, f bervariasi terbatas pada $[a,c]$ dan $[c,b]$. Lebih lanjut $T_a^b(f) = T_a^c(f) + T_c^b(f)$.
7. Jika $f \in BV[a,b]$, maka $f \in BV[c,d]$, untuk setiap $[c,d] \subset [a,b]$.
8. Diberikan fungsi $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ bervariasi terbatas pada $[a,b]$, maka f terbatas.
9. Diberikan fungsi $f, g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Jika $f, g \in BV[a,b]$, maka $fg \in BV[a,b]$.
10. Diberikan $f \in BV[a,b]$. Didefinisikan fungsi $v_f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, dengan $v_f(x) = T_a^x(f)$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka v_f merupakan fungsi naik monoton pada $[a,b]$.

11. Fungsi $f \in BV[a, b]$ jika dan hanya jika fungsi f dapat dinyatakan sebagai selisih dua fungsi naik monoton pada $[a, b]$.
12. Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan f' terbatas pada $[a, b]$ maka f bervariasi terbatas pada $[a, b]$.

4.2 SARAN

Pada penulisan ini dibahas mengenai Fungsi Bervariasi Terbatas, bagi pembaca yang tertarik dengan masalah ini dapat melanjutkan penelitian untuk mengembangkan dan memperluas pada pembahasan Fungsi Bervariasi Terbatas pada Ruang Euclide \mathbb{R}^n .

DAFTAR PUSTAKA

- Bartle, R., G., and Sherbert., D., R., 2000, *Introduction to Real Analysis Third Editions*, John Wiley and Sons Inc, United States of America.
- Darmawijaya,S.,2006, *Pengantar Analisis Real*, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UGM,Yogyakarta.
- Gupta, V., P., and Jain., P., K., 1986, *Lebesgue Measure and Integration*, Wiley Eastern Limited, New Delhi.
- Pfeffer, W., F., 1993, *The Riemann Approach to Integration:Local Geometric Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Parzynski and Zipse, 1982. *Introduction to Mathematical Analysis*, Mc Grow–Hill Book Company, New York.
- Rudin, W.,1953, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill book Company, Tokyo.
- Goldbert, R., 1976, *Method of Real Analyis 2nd Edition*, John Wiley and Sons, New York.